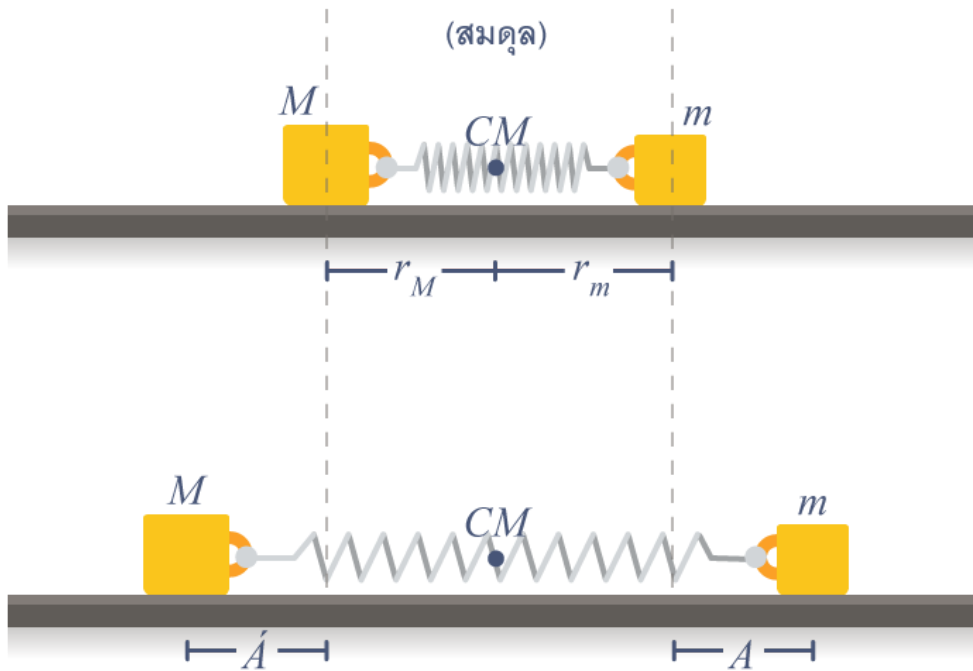


## เฉลยชุดข้อสอบ : กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ชุดที่ 2

### ข้อที่ 1

ตอบ  $\frac{m}{M}A$



เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ จุด  $CM$  ของระบบต้องไม่มีความเร่ง (ในที่นี้ คือ "อยู่กับที่" ไปเลย) ดังนั้นไม่ว่า  $M, m$  จะพยายามเคลื่อนที่ออกจากสมดุลอย่างไร จุด  $CM$  ของมันจะอยู่ที่เดิม :

ที่สมดุล

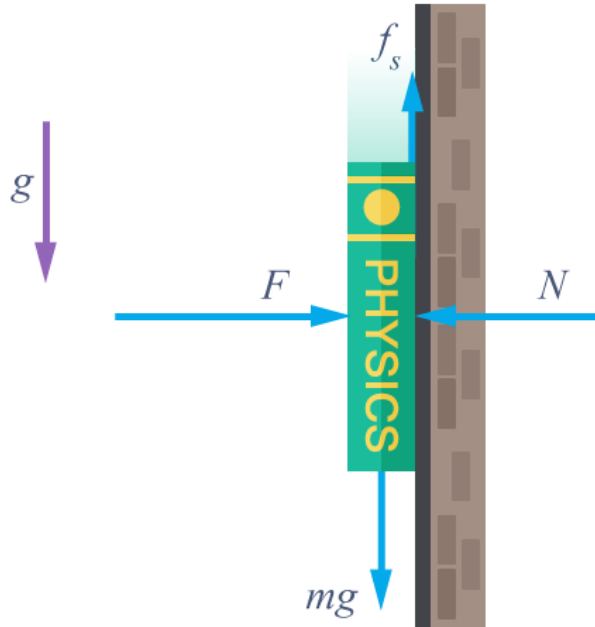
$$\begin{aligned} x_{cm} &= 0 \\ &= \frac{M(-x_M) + mx_m}{M + m} \\ \therefore x_M &= \frac{m}{M}x_m \end{aligned}$$

ในขณะที่มวลทั้งสองสั้น  $x_M$  และ  $x_m$  จะเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาและจะเปลี่ยนในลักษณะที่อัตราส่วนระหว่าง  $x_M$  และ  $x_m$  เป็นค่าคงที่  $(\frac{m}{M})$  แอมพลิจูดของการสั่นก็จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะ  $x_M$  และ  $x_m$  นี้ด้วย ดังนั้น

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{m}{M}$$

### ข้อที่ 2

ตอบ 12.1)  $28 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$   
 12.2)  $19.6 \text{ N}$



เขียน free body diagram ดังรูป  
วัตถุอยู่ในสมดุล ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวระดับเป็นศูนย์

$$F = N$$

แรงลัพธ์ในแนวตั้งเป็นศูนย์

$$f_s = mg$$

จากเงื่อนไขของแรงเสียดทานสถิต

$$f_s \leq \mu_s N$$

ได้

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{f_s}{\mu_s} \\ &= \frac{mg}{\mu_s} \\ \therefore F_{min} &= \frac{mg}{\mu_s} \\ &= \frac{(2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{0.7} \\ &= 28 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

(เป็นคำตอบข้อ 12.1)

เนื่องจาก

$$f_s = mg = 19.6 \text{ N}$$

จะเท่าเดิมตลอดแม้จะเพิ่มค่า  $F$  ให้มากกว่า 28 N (สมดุลในแนวตั้ง, การเพิ่ม  $F$  จะไม่ทำให้วัตถุเลื่อนขึ้น/ลง)  
(เป็นคำตอบข้อ 12.2)

### ข้อที่ 3

ตอบ ศูนย์

พิจารณาห่วงเล็ก ๆ ที่ตำแหน่งห่างจาก  $O$  เป็นระยะ  $R$  กำลังเคลื่อนที่รอบแกนตั้งด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$  ความเร่งที่ห่วงเล็ก ๆ ( $a'$ ) สามารถบรรยายได้ด้วยหลักการของ การเคลื่อนที่ภายใต้กรอบไม่เฉื่อย ใน Polar coordinate  $(r, \theta)$  นั่นคือ

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (1)$$

เมื่อ

$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$  เป็นความเร่งเนื่องจากที่โลกกระทำต่อห้วงเล็ก ๆ

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{g} = g \cos \theta \hat{e}_r - g \sin \theta \hat{e}_\theta$$

$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'$  เป็นความเร่งของห้วงเล็ก ๆ

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -r \left( \frac{d}{dt} \theta \right)^2 \hat{e}_r + \left( r \frac{d^2}{dt^2} \theta \right) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = (\vec{\omega} \cdot r \vec{e}_r) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) r \vec{e}_r = ([-\omega \cos \theta \hat{e}_r + \omega \sin \theta \hat{e}_\theta] \cdot r \hat{e}_r) \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}' \text{ เป็น Coriolis acceleration มีค่าเท่ากับ } = \vec{\omega} \times r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \omega r \dot{\theta} (-\vec{e}_r)$$

$\frac{d}{dt} \vec{\omega} = 0$  เนื่องจากความเร็วเชิงมุม ณ ตำแหน่งสมดุลงจะมีค่าคงที่

ในการหาจุดสมดุลสามารถทำได้โดย คุณสมการที่ (1) ด้วย  $\hat{e}_\theta$  (สังเกตว่า  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$  และ  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$ ) จะได้ว่า

$$-g \sin \theta = r \ddot{\theta} + (-\omega r \cos \theta)(\omega \sin \theta)$$

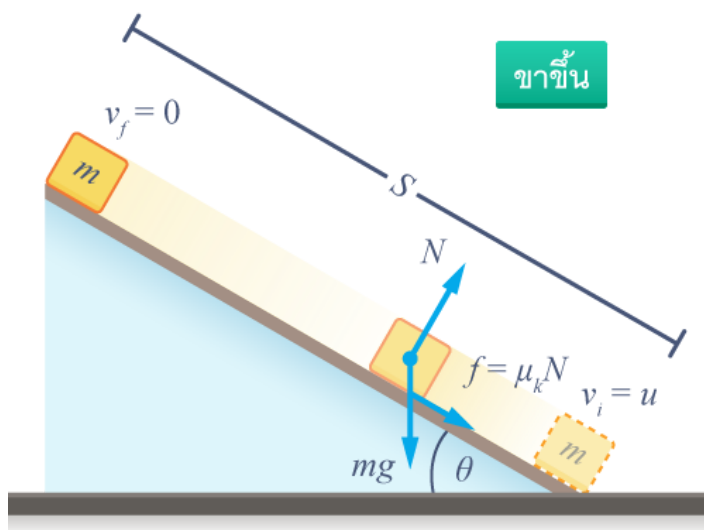
และใช้เงื่อนไขที่ว่า หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ดังนั้นความเร่งเชิงมุมจะมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ว่า

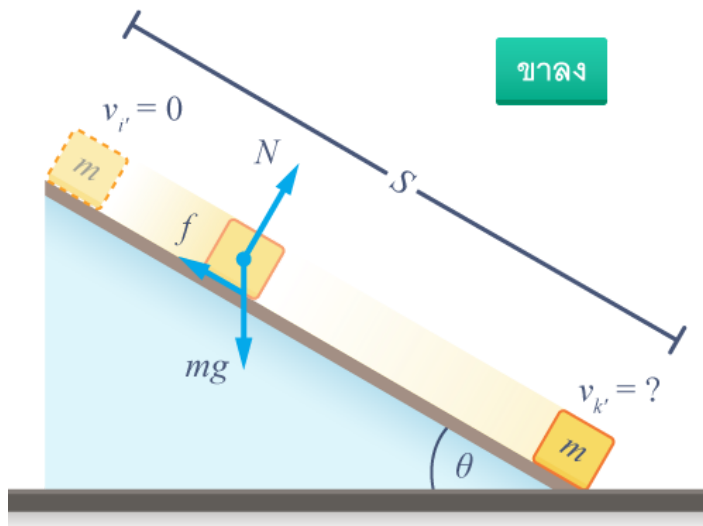
$$\begin{aligned} \omega^2 r \cos \theta &= g \\ \therefore \cos \theta &= \frac{g}{\omega^2 r} \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าความเร็วเชิงมุมมีค่าโตมาก ๆ มุม  $\theta$  จะมีค่าเท่ากับศูนย์

#### ข้อที่ 4

ตอบ  $\sqrt{\frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta}} \cdot u$





แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 (เนื่องจากมีความเร็วไม่เท่ากันทั้งขนาดและทิศทาง) โดยเราจะหาระยะทาง  $S$  ตามพื้นเอียงที่มันขึ้นไปได้สูงสุดก่อน จึงเริ่มหาความเร็วสุดท้ายที่ไหลลงมา

ขาขึ้น โดยพิจารณา freebody diagram พบว่า

$$N = mg \cos \theta$$

$$f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$$

จาก Newton's 2nd law เขียนสมการได้ว่า

$$ma = m(-g \sin \theta) - \mu_k g \cos \theta$$

$$a = -(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)g$$

เป็นความเร็วกขาขึ้น นำความเร็วนี้นำไปหาระยะที่มวลไหลขึ้น จนหยุดนิ่งอยู่ด้านบนพื้นเอียง เขียนสมการได้ว่า

$$0 - u^2 = 2(-1)(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)g \cdot S$$

$$S = \frac{u^2}{2(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)g}$$

เป็นระยะทางที่มวลไหลขึ้นไปได้

ต่อไป พิจารณาขาลง จาก Newton's 2nd law เขียนสมการได้ว่า

$$ma = mg \sin \theta - \mu_k g \cos \theta$$

$$a = (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)g$$

เป็นความเร็วกขณะที่มวลเคลื่อนที่ลงพื้นเอียง

ต่อไป สามารถหาความเร็วปลายเมื่อมวลเคลื่อนที่กลับลงมาถึงพื้น ดังนี้

$$v^2 - u^2 = 2aS$$

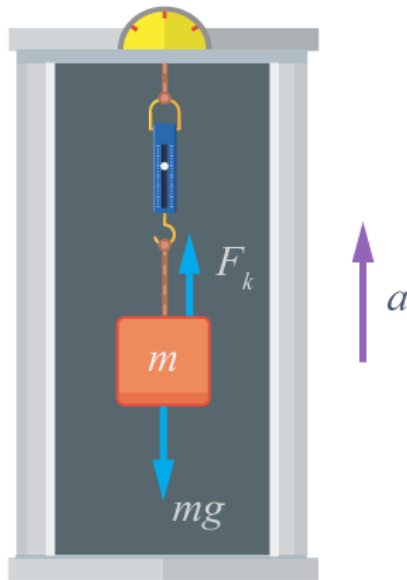
$$v^2 - 0 = 2 \cdot (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)g \cdot \frac{u^2}{2(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)g}$$

$$v^2 = \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta} u^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta}} \cdot u$$

## ข้อที่ 5

- ตอบ 1)  $2.7 \text{ m/s}^2$  ทิศขึ้น  
2) ตรงข้างอ่านค่าได้ศูนย์



สมมติให้ Lift ริงขึ้นด้วย ความเร่ง  $a$  จะได้

$$\begin{aligned}
 ma &= F_k - mg \\
 a &= \frac{125 - 10 \times 9.8}{10} \\
 &= 2.7 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

$\therefore$  ลิฟท์มีความเร่ง  $2.7 \text{ m/s}^2$  ทิศขึ้น

เมื่อที่แขวนตาชั่งหลุดจากเพดาน หังตาชั่งและมวล  $10 \text{ kg}$  จะตกอย่างอิสระ และมีความเร่ง  $g$  ดังนั้นจึงไม่มีแรงใด ๆ กระทำกับตาชั่ง ตราชั่งจึงอ่านค่าได้ศูนย์

## ข้อที่ 6

ตอบ  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1}}$

พิจารณาระบบดาวคู่ มวล  $m_1$  และ  $m_2$  กำลังโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล (CM) ที่จุด  $O$

$$\begin{aligned}
 X_{\text{CM}} &= \frac{m_1(-R_1) + m_2(R_2)}{m_1 + m_2} = 0 \\
 R_2 &= \frac{m_1 R_1}{m_2}
 \end{aligned}$$

พิจารณามวล  $m_1$ ; เคลื่อนที่รอบจุด  $O$  โดยมีแรงดึงดูดระหว่างมวลทำหน้าที่เป็นแรงสู่ศูนย์กลาง  $F_c$  เขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \Sigma F &= \frac{Gm_1 m_2}{(R_1 + R_2)^2} \\
 F_c &= m_1 \omega^2 R_1 \\
 \omega^2 &= \frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}
 \end{aligned}$$

ระบบดาวมี  $\omega$  เท่ากัน

$$\begin{aligned}
 \therefore \omega_2 &= \omega_1 = \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}} \\
 v_2 &= \omega_2 R_2 = R_2 \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}} \\
 v_2 &= \left( \frac{m_1 R_1}{m_2} \right) \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1 \left( R_1 + \frac{m_1 R_1}{m_2} \right)^2}} \\
 v_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1}}
 \end{aligned}$$

## ข้อที่ 7

- 1) แรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุมีทิศทางซ้าย (ตรงข้ามกับความเร็ว) มีขนาดเท่ากับ

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

- 2) ความเร่งของแผ่นไม้ไปทางขวา มีขนาดเท่ากับ

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\ \mu_k mg &= Ma \\ a &= \frac{\mu_k mg}{M}\end{aligned}$$

- 3) คัดแผ่นไม้

$$\text{รู้ } u = 0, a = \frac{\mu_k mg}{M}, s = s_1, v = v, t = t$$

$$\begin{aligned}v &= u + at \\ v &= 0 + \frac{\mu_k mg}{M}t \text{ ---- (1)}\end{aligned}$$

คิดวัตถุ หาความเร่งของวัตถุก่อนแล้วคำนวณการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\ -\mu_k mg &= ma \\ a &= -\mu_k g\end{aligned}$$

$$\text{รู้ } u = u, a = -\mu_k g, s = s_2, v = v, t = t$$

$$\begin{aligned}v &= u + at \\ v &= u - \mu_k gt \text{ ---- (2)}\end{aligned}$$

(1) = (2) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\mu_k mg}{M}t &= u - \mu_k gt \\ t &= \frac{Mu}{\mu_k g(M + m)}\end{aligned}$$

คิดแผ่นไม้เพื่อคำนวณหาค่า  $s$

$$\begin{aligned}s &= ut + \frac{1}{2}at^2 \\ s_1 &= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_k mg}{M}\right)\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M + m)}\right)^2 \\ s_1 &= \frac{mMu^2}{2\mu_k g(m + M)^2}\end{aligned}$$

- 4) หา  $s_2$  ของวัตถุเทียบโลก

$$\begin{aligned}s &= ut + \frac{1}{2}at^2 \\ s_2 &= u\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M + m)}\right) - \frac{1}{2}(\mu_k g)\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M + m)}\right)^2 \\ s_2 &= \frac{u^2 M(M + 2m)}{2\mu_k g(M + m)^2}\end{aligned}$$

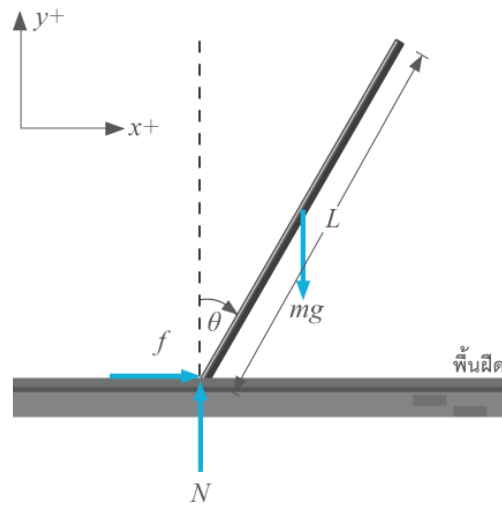
หา  $s_2$  เทียบ  $s_1$

$$\begin{aligned}s_{2/1} &= s_2 - s_1 = \frac{u^2 M(M + 2m)}{2\mu_k g(M + m)^2} - \frac{Mmu^2}{2\mu_k g(M + m)^2} \\ s_{2/1} &= \frac{Mu^2}{2\mu_k g(M + m)}\end{aligned}$$

- 5) เมื่อวัตถุหยุดไถล  $\mu_k = 0$  แรงเสียดทานจนเท่ากันศูนย์

แรงเสียดทานสถิต  $f_s = \mu_s mg$

ข้อที่ 8



เงื่อนไขค่า  $\mu : \mu \geq \frac{f}{N}$  ทุกๆ  $\theta$   
หา  $f, N$  ที่  $\theta$  ต่างๆ

$$f = m \frac{d^2}{dt^2} x_{cm} = m \ddot{x}_{cm}$$

$$N - mg = m \frac{d^2}{dt^2} y_{cm} = m \ddot{y}_{cm}$$

$$\frac{f}{N} = \frac{\ddot{x}_{cm}}{\ddot{y}_{cm} + g}$$

หา  $\ddot{x}_{cm}, \ddot{y}_{cm}$

$$x_{cm} = \frac{L}{2} \sin \theta$$

$$\dot{x}_{cm} = \frac{L}{2} \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{L}{2} \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$y_{cm} = \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\dot{y}_{cm} = -\frac{L}{2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{y}_{cm} = -\frac{L}{2} \sin \theta \cdot \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2$$

หา  $\dot{\theta}^2, \ddot{\theta}$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานรวมรอบจุดหมุนที่พื้นจะได้

$$K_0 + U_0 = K + U$$

$$0 + \frac{L}{2} mg = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} mL^2 \right) \dot{\theta}^2 + mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\dot{\theta}} \cdot \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}/dt}{d\theta/dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

แทนค่าใน  $\ddot{x}_{cm}, \ddot{y}_{cm}$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{\text{cm}} &= \frac{L}{2} \cos \theta \cdot \frac{3g}{2L} \sin \theta - \frac{L}{2} \sin \theta \cdot \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{3g}{4} (3 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta) \\ \ddot{y}_{\text{cm}} &= -\frac{L}{2} \sin \theta \cdot \frac{3g}{2L} \sin \theta - \frac{L}{2} \cos \theta \cdot \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{3g}{4} (3 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos \theta)\end{aligned}$$

ตอบ แรงเสียดทาน  $f$  มีค่าเท่ากับ

$$f = m\ddot{x} = \frac{3mg}{4} (3 \cos \theta - 2) \sin \theta$$

ตอบ แรงปฏิกิริยา  $N$  ที่พื้นกระทำต่อปลายท่อนไม้ เท่ากับ

$$\begin{aligned}N &= m\ddot{y} + mg \\ &= \frac{3mg}{4} \left[ 3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 + \frac{4}{3} \right]\end{aligned}$$

แทนใน  $\frac{f}{N}$

$$\begin{aligned}\frac{f}{N} &= \frac{\ddot{x}_{\text{cm}}}{\ddot{y}_{\text{cm}} + g} \\ &= \frac{\frac{3g}{4} (3 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta)}{\frac{3g}{4} (3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{4}{3} - 1)} \\ &= \frac{3 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta}{3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{(3 \cos \theta - 2) \sin \theta}{(3 \cos \theta - 1)(\cos \theta - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{3(3 \cos \theta - 2) \sin \theta}{(3 \cos \theta - 1)^2}\end{aligned}$$

หาค่า  $\theta$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \cdot 3 \sin \theta &= \frac{3 \cos \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^2} + 3 \sin \theta \frac{d}{d\theta} \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \\ &= \frac{3 \cos \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^2} - 3 \sin^2 \theta \frac{d}{d \cos \theta} \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \\ &= \frac{3 \cos \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^2} - \frac{9 \sin^2 \theta}{(3 \cos \theta - 1)^2} - 3 \sin^2 \theta (3 \cos \theta - 2) \frac{d}{d \cos \theta} \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^2} \\ &= \frac{3 \cos \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^2} - \frac{9 \sin^2 \theta}{(3 \cos \theta - 1)^2} + \frac{18 \sin^2 \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^3} \\ &= \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^3} (3 \cos \theta (3 \cos \theta - 1)(3 \cos \theta - 2) - 9 \sin^2 \theta (3 \cos \theta - 1) + 18 \sin^2 \theta (3 \cos \theta - 2)) \\ &= \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^3} ((3 \cos \theta)^3 - 3(3 \cos \theta)^2 + 2(3 \cos \theta) + 9 \sin^2 \theta (3 \cos \theta - 3)) \\ &= \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^3} ((3 \cos \theta)^3 - 3(3 \cos \theta)^2 + 2(3 \cos \theta) + (9 - (3 \cos \theta)^2)(3 \cos \theta - 3)) \\ &= \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^3} ((3 \cos \theta)^3 - 3(3 \cos \theta)^2 + 2(3 \cos \theta) - (3 \cos \theta)^3 + 3(3 \cos \theta)^2 + 9(3 \cos \theta - 3)) \\ &= \frac{1}{(3 \cos \theta - 1)^3} (2(3 \cos \theta) + 9(3 \cos \theta - 3)) \\ &= 3 \frac{(11 \cos \theta - 9)}{(3 \cos \theta - 1)^3}\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \cdot 3 \sin \theta &= \frac{3(11 \cos \theta - 9)}{(3 \cos \theta - 1)^3} \\ 0 &= \frac{3(11 \cos \theta - 9)}{(3 \cos \theta - 1)^3} \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{9}{11}\end{aligned}$$



หา  $\mu$  ด้วยการแทน  $\theta = \arccos \frac{9}{11}$

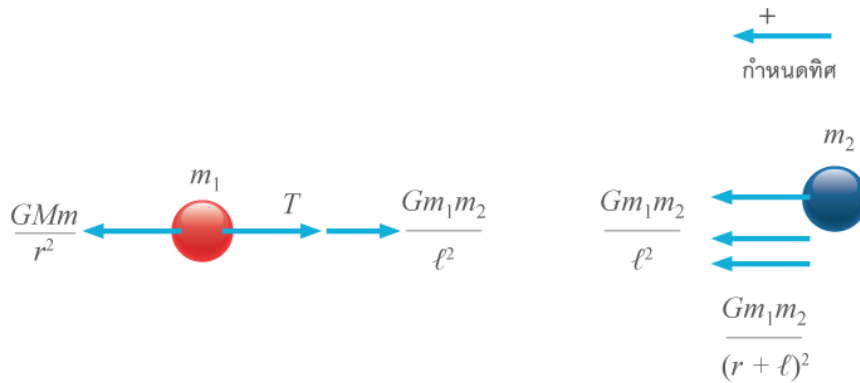
$$\begin{aligned} \mu &= \frac{f}{N} \\ &= \frac{d}{d\theta} \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \cdot 3 \sin \theta \\ &= \frac{3 \cdot \frac{9}{11} - 2}{\left(3 \cdot \frac{9}{11} - 1\right)^2} \cdot \frac{3\sqrt{40}}{11} \\ &= \frac{15\sqrt{10}}{128} \\ &\approx 0.3706 \end{aligned}$$

เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน(สถิต)ที่ทำให้ท่อนไม้ไม่ไถลในระหว่างล้มเลย **ตอบ**

### ข้อที่ 9

**ตอบ**  $T(r) = GM \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{2\ell}{r^3}$

พิจารณา แผนภาพวัตถุเสรีของ  $m_1$  และ  $m_2$



แต่เชือกต้องมีความยาวคงตัว

$$a_1 = a_2 = a$$

$$\begin{aligned} \frac{GMm_1}{r^2} - T - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2} &= m_1 a \\ \frac{GM}{r^2} - \frac{T}{m_1} - \frac{Gm_2}{\ell^2} &= a \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{GMm_2}{(\ell + r)^2} + T + \frac{Gm_1m_2}{\ell^2} &= m_2 a \\ \frac{GM}{(\ell + r)^2} + \frac{T}{m_2} + \frac{Gm_1}{\ell^2} &= a \end{aligned}$$

ได้

$$\begin{aligned} GM \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(\ell + r)^2} \right) - T \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{G}{\ell^2} (m_1 + m_2) &= 0 \\ \frac{GM(2r\ell + \ell^2)}{r^2(r + \ell)^2} - \frac{G}{\ell} (m_1 + m_2) &= T \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \\ T(r) &= \frac{GMm_1m_2(2r\ell + \ell^2)}{(m_1 + m_2)r^2(r + \ell)^2} - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2} \end{aligned}$$

กรณี  $r \gg \ell$

$$r + \ell = r \text{ และ } 2r\ell + \ell^2 = 2r\ell$$

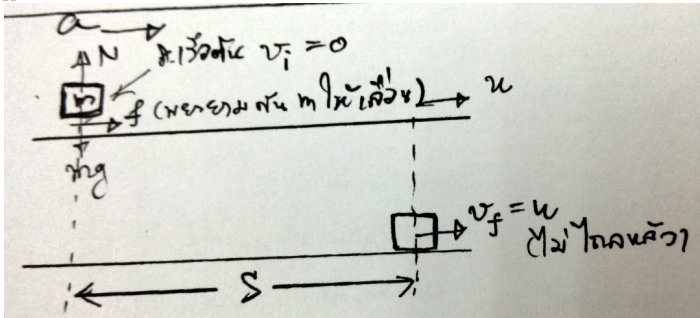
$$T(r) = \frac{2GMm_1m_2\ell}{(m_1 + m_2)r^3} - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2}$$

เพิ่มเติม  
กรณี  $m_1, m_2 \ll M$  และ  $r \gg \ell$

$$T(r) = \frac{2GMm_1m_2\ell}{(m_1 + m_2)r^3}$$

**ข้อที่ 10**

ตอบ 1)  $T = \frac{u}{g\mu_K}$   
 2)  $S = \frac{u^2}{2g\mu_K}$



ในกรณีนี้ แรงเสียดทานจลน์  $f_K = \mu_K N$  จะพยายามลากวัตถุ  $m$  ให้เลื่อนไปตามสายพาน โดยมีมันจะ กะทำกับ  $m$  ไปเรื่อย ๆ จนกว่าความเร็วของมันจะเท่ากับสายพานพอดี (ที่จุดนี้จะไม่มีการไถลระหว่างผิวอีก) แล้ว  $m$  จะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วของสายพานต่อไปเรื่อย ๆ จาก freebodydiagram เราได้

$$\sum F_y = 0; mg = N$$

$$\sum F_x = ma_x; \mu_K N = ma$$

$$a = \mu_K g$$

จาก  $v_f = v_i + aT;$

$$u = 0 + (\mu_K g)T$$

$$T = \frac{u}{g\mu_K}$$

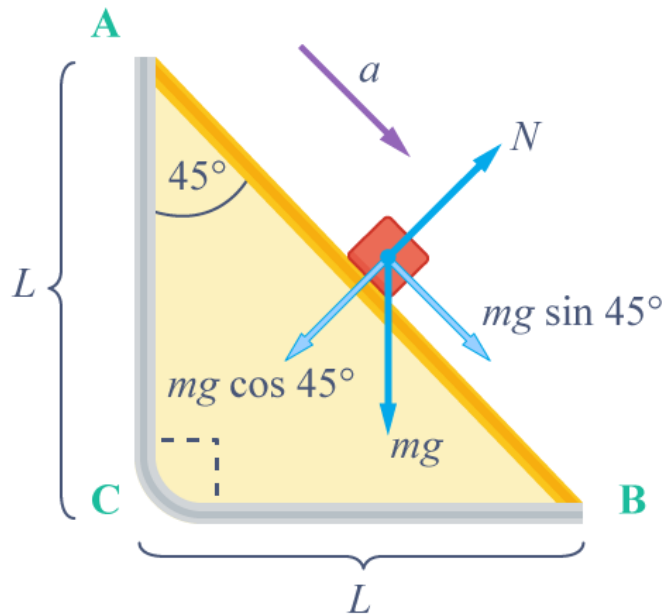
จาก  $v_f^2 = v_i^2 + 2aS;$

$$u^2 = 0 + 2(\mu_K g)S$$

$$S = \frac{u^2}{2g\mu_K}$$

**ข้อที่ 11**

ตอบ  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  เท่า



ทาง  $A \rightarrow B$  การตกตามพื้นเอียงด้วยความเร่ง

$$a = \frac{mg \sin 45^\circ}{m}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

โดยเริ่มตกจากนิ่ง ได้ระยะทาง  $\sqrt{2}L$  จาก

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

ได้

$$t_{A \rightarrow B} = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{4L}{g}}$$

ทาง  $A \rightarrow C$  คือ การตกอิสระ จาก

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$L = \frac{1}{2}gt_{A \rightarrow C}^2$$

ได้

$$t_{A \rightarrow C} = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

โดยมีความเร็วปลาย  $v_c = u + at$

$$v_c = g \times t_{A \rightarrow C}$$

$$= \sqrt{2Lg}$$

ทาง  $C \rightarrow B$  ใช้  $s = v_c t$  (ไม่มีความเร่งแนวระดับ);

$$t_{C \rightarrow B} = L/v_c$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{เวลาจาก } A \rightarrow C \rightarrow B}{\text{เวลาจาก } A \rightarrow B} &= \frac{t_{A \rightarrow C} + t_{C \rightarrow B}}{t_{A \rightarrow B}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{L}{2g}}}{\sqrt{\frac{4L}{g}}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ เท่า} \end{aligned}$$

## ข้อที่ 12

(ก) ในการหาแรงต้านการเคลื่อนที่ของโซ่ พิจารณาการตกลง ตำแหน่งที่โซ่กำลังจะเคลื่อนที่ออกจากกองโซ่ เขียนสมการได้ว่า

$$F \cdot dt = \lambda \cdot d(xv)$$

$$F = \lambda v^2$$

ดังนั้น จากกฎข้อที่สามของ Newton แรง  $F$  นี้จะทำหน้าที่ต้านการเคลื่อนที่ของโซ่ส่วนที่ยาว  $x$  ด้วย และเมื่อคำนึงถึงแรงเสียดทาน สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$(M + \lambda x)\ddot{x} = -\mu(M + \lambda x)g - \lambda v^2$$

(ข) จาก Chain rule

$$\ddot{x} = \left(\frac{d}{dt}\right)v = \left(\frac{d}{dx} \frac{dx}{dt}\right)v = \left(\frac{d}{dx}v\right)v = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}v^2$$

แทนค่าผลที่ได้นี้เข้าไปในสมการการเคลื่อนที่ในข้อ (ก) แล้วจัดรูปได้

$$\frac{d}{dx}v^2 + \frac{2\lambda}{M + \lambda x}v^2 = -2\mu g$$

สามารถแก้สมการ (Differential equations) นี้โดยการหา Integrating factor มาคูณแล้วอินทิเกรต การหา Integrating factor ( $I$ ) สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} I &= e^{\int \frac{2\lambda}{M + \lambda x} dx} \\ &= (M + \lambda x)^2 \end{aligned}$$

แล้วคูณ factor นี้กับสมการการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned} (M + \lambda x)^2 \frac{d}{dx}v^2 + 2\lambda(M + \lambda x)v^2 &= -2\mu g(M + \lambda x)^2 \\ d(M + \lambda x)^2 v^2 &= -2\mu g(M + \lambda x)^2 dx \end{aligned}$$

อินทิเกรตจาก  $x = 0$  และ  $v = v_0$  ไปจนถึงตำแหน่ง  $x$  ใดๆ และ  $v$  ใดๆ ทั้งสองข้างของสมการแล้วจัดรูป สามารถหาความเร็วของมวล  $M$  ที่ตำแหน่งใดๆ ได้ว่า

$$v(x) = \sqrt{\frac{3\lambda M^2 v_0^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]}{3\lambda(M + \lambda x)^2}}$$

(ค) differentiate ความเร็ว  $v(x)$  ในข้อ (ข) เทียบเวลา ได้

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2v} \left[ -2\mu g v - \frac{2v}{3(M + \lambda x)^3} (3\lambda M^2 v_0^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]) \right] \\ &= -\mu g - \frac{1}{3(M + \lambda x)^3} (3\lambda M^2 v_0^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]) \end{aligned}$$

(ง) แทนค่า  $x = 0$  ตามเงื่อนไขลงในสมการที่ได้จากข้อ (ค) ได้

$$a = -\mu g - \frac{\lambda}{M} v_0^2$$

ซึ่งให้ผลเหมือนกันกับข้อ (ก) เมื่อ  $x = 0$

